

## UN NUOVO METODO PER LA DETERMINAZIONE DELL'AMPIEZZA DELLA TENSIONE TANGENZIALE NEI CRITERI DI FATICA MULTIASSIALE BASATI SULL'APPROCCIO DI PIANO CRITICO

G. Petrucci, F. Mocera

<sup>a</sup> Università degli Studi di Palermo - Dipartimento di Ingegneria Chimica, Gestionale, Informatica, Meccanica - Viale delle Scienze, 90128 Palermo, e-mail: giovanni.petrucci@unipa.it

### Sommario

Nel caso di sollecitazioni di fatica multiassiale di tipo non proporzionale il vettore della tensione tangenziale varia sia in modulo che in direzione e la sua punta descrive una curva definita *percorso di carico*. In questi casi l'ampiezza della tensione tangenziale alternata  $\tau_a$  viene valutata mediante apposite procedure, quali quella del Minimo Cerchio Circoscritto e la più recente ed apparentemente più efficace, relativa al Massimo Rettangolo Circoscritto. Entrambe le procedure presentano tuttavia dei difetti che fanno ritenere che la definizione da cui si originano non sia del tutto corretta. In questo lavoro viene proposta una nuova definizione di tensione tangenziale alternata. Essa non presenta i difetti degli altri metodi e, utilizzata con alcuni efficaci criteri di piano critico, fornisce risultati più congruenti con i dati sperimentali disponibili in letteratura. La procedura di calcolo è di semplice implementazione.

### Abstract

In the case of multiaxial non proportional fatigue stresses, the shear stress vector varies both in modulus and direction and its tip describes a curve defined *loading path*. In these cases  $\tau_a$  is identified and evaluated by means of special procedures like the Minimum Circumscribed Circle method and the most recent, and apparently more effective, Maximum Circumscribed Rectangle method. However, both definitions present drawbacks suggesting that the definition from which they have been developed are not entirely correct. In this paper, a new definition of alternating shear stress has been proposed. It does not present the flaws of the other methods and, applied with some effective critical plane based criteria, provides results more consistent with the experimental data available in the literature than the existing methods. The procedure is also easy to be applied.

**Parole chiave:** fatica multiassiale, tensione tangenziale alternata, cerchio, rettangolo, circoscritto.

### 1. INTRODUZIONE

I criteri di fatica multiassiale ad alto numero di cicli basati sull'approccio di piano critico [1-4] sono espressi da un'equazione del tipo

$$\tau_{a,c} + kN \leq f \quad (1)$$

nella quale  $\tau_{a,c}$  è l'ampiezza della tensione tangenziale alternata agente sul piano critico,  $N$  è un valore dipendente dalle tensioni normali  $\sigma_n$  agenti nel punto considerato, spesso coincidente con la tensione massima o la tensione alternata agente sul piano critico,  $f$  è una costante legata ai limiti di fatica del materiale,  $k$  è una costante legata alla differente risposta del materiale alle tensioni normali e tangenziali dal punto di vista della propagazione della frattura.

Il piano critico viene determinato come il piano su cui si determina il massimo valore di  $\tau_a$ , oppure il

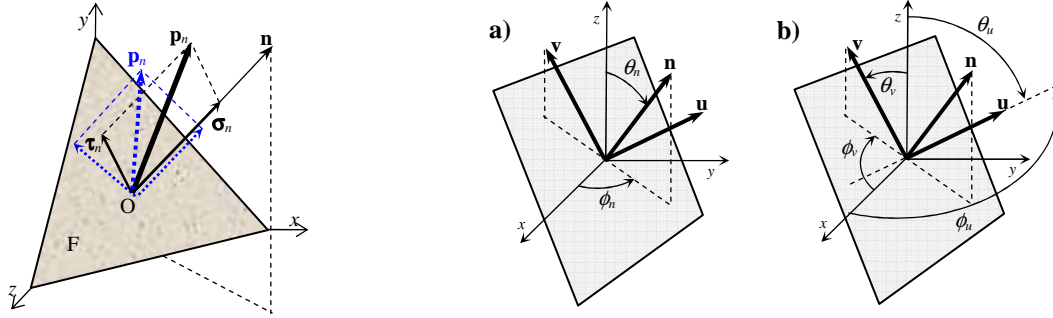


Figura 1: A sinistra il vettore tensione  $\mathbf{p}_n$  agente sul piano F di normale  $\mathbf{n}$  passante per il punto O del materiale. A destra il sistema di assi  $nuv$  e le coordinate sferiche dei versori: a) orientazione versore  $\mathbf{n}$ , b) orientazione dei versori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

massimo valore di una combinazione tra  $\tau_a$  ed  $N$ .

È evidente che l'applicazione di questo tipo di criteri richiede la determinazione dell'ampiezza della tensione tangenziale alternata  $\tau_a$  agente sui diversi piani passanti per il punto del materiale analizzato [1-4].

In fig.1 a sinistra è mostrato il vettore tensione  $\mathbf{p}_n$  agente in un punto O del materiale, su un generico piano F, la cui giacitura è identificata mediante il versore della direzione ad esso ortogonale  $\mathbf{n}$ , insieme ai suoi componenti normale e parallelo al piano, cioè  $\sigma_n$  e  $\tau_n$ . Noto il tensore degli sforzi nel punto  $\sigma(t)$  ed assegnata la direzione  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{p}_n$ ,  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  possono essere ottenute mediante le seguenti, note, relazioni:

$$\mathbf{p}_n(t) = \sigma(t) \mathbf{n}$$

$$\sigma_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n(t) \mathbf{n} = [\tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad (2-4)$$

$$\tau_n(t) = \mathbf{p}_n(t) - \sigma_n(t) = \sigma(t) \mathbf{n} - [\tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n}] \mathbf{n}$$

A loro volta i moduli dei vettori  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  possono essere ottenuti come

$$\sigma_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\tau_n(t) = \sqrt{p_n^2(t) - \sigma_n^2(t)} \quad (6)$$

Nel caso di tensioni variabili nel tempo, in generale,  $\tau_n$  risulta variabile sia in modulo che in direzione (fig.1). La sua posizione nel piano F in istanti differenti può essere identificata mediante le componenti in un sistema di riferimento cartesiano con assi  $u-v$  ortogonali, disposti parallelamente ad

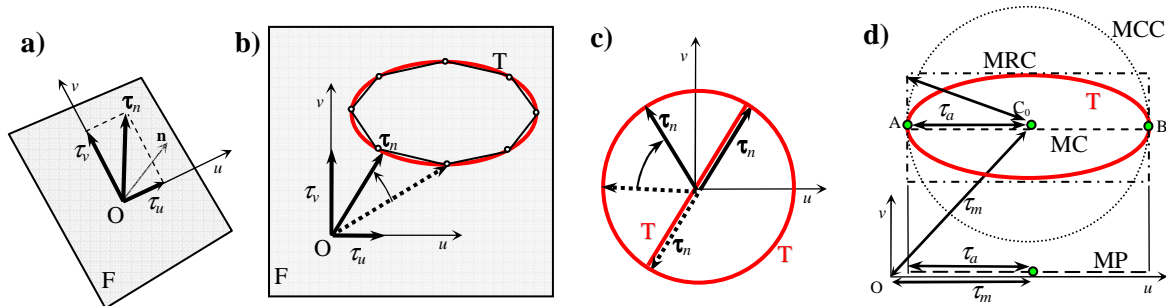


Figura 2: a) Vettore  $\tau_n$ , b) esempio di curva T, c) confronto tra la sollecitazione di tipo proporzionale (curva T in rosso, coincidente con un segmento di retta), e sollecitazione non proporzionale (curva T in rosso, coincidente con una circonferenza), d) i metodi MP, MC, MCC, ed MRC.

F, centrati in O, quale, ad esempio, quello mostrato in fig.1 a destra. In tale sistema le coordinate sferiche delle 3 direzioni sono rappresentate dai seguenti vettori:

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(n_y/n_x) \\ \cos^{-1}(n_z) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_u \\ \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n + \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_v \\ \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n - \pi \\ \pi/2 - \theta_n \end{bmatrix} \quad (7-9)$$

e, in base alle (8,9), i versori delle direzioni  $u$  e  $v$  possono essere ottenuti come

$$\mathbf{n}_u = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_n) \\ \cos(\phi_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_v = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_n) \cos(\phi_n) \\ -\cos(\theta_n) \sin(\phi_n) \\ \sin(\theta_n) \end{bmatrix} \quad (10,11)$$

infine, le componenti  $\tau_u$  e  $\tau_v$  (vedi fig.2) possono essere ottenute con le seguenti relazioni

$$\tau_u(t) = \tilde{\mathbf{n}}_u \cdot \mathbf{p}_n(t) \quad \tau_v(t) = \tilde{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbf{p}_n(t) \quad (12,13)$$

Nel caso più generale di sollecitazioni di tipo non proporzionale, nelle quali le componenti del tensore  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  non agiscono in fase o contro-fase, la punta del vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  al variare del tempo effettua un percorso costituito da una curva piana T, definita anche *percorso di carico*, come nell'esempio di fig.2b. Nel caso di storie di sollecitazione di tipo periodico, la curva T risulta chiusa. Nei casi particolari di sollecitazioni di tipo proporzionale o con componenti alternate proporzionali, la curva T degenera in una *retta*. In fig.2c viene mostrato il confronto tra il caso di componenti  $\tau_{xy} \equiv \tau_u$  e  $\tau_{xz} \equiv \tau_v$  di tipo sinusoidale agenti in fase, che danno luogo ad un vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  con direzione costante e modulo variabile, la cui punta descrive una curva T costituita da un segmento rettilineo, e il caso di componenti  $\tau_{xy} \equiv \tau_u$  e  $\tau_{xz} \equiv \tau_v$  sempre di tipo sinusoidale, ma con differenza di fase pari a  $\pi/2$ , che danno luogo ad un vettore di modulo costante e rotante nel piano, la cui punta descrive una curva T costituita da una *circonferenza*. Da notare che, nei due casi descritti, il valore massimo del modulo del vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  (costante nel caso della sollecitazione non proporzionale) è uguale.

Nel caso delle sollecitazioni proporzionali, essendo costante la direzione del vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$ , la determinazione delle componenti media ( $\tau_m$ ) ed alternata ( $\tau_a$ ) della tensione tangenziale è immediata, mentre nel caso non proporzionale, a causa della variazione di direzione del vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$ , l'identificazione e la conseguente valutazione di  $\tau_m$  e  $\tau_a$  è tutt'altro che banale ed in letteratura ne sono state proposte diverse definizioni [5-13].

La correttezza della definizione di  $\tau_a$  implica ovviamente che i risultati ottenuti introducendone il valore nelle equazioni di verifica (1) siano concordi con i dati sperimentali. Tuttavia, a causa del fatto che la curva T può assumere infinite forme, con caratteristiche molto differenti e che i dati sperimentali sono noti per un numero limitato di casi, la verifica della correttezza delle definizioni proposte non è semplice. In questo senso, una caratteristica che dovrebbe essere rispettata è che i valori di  $\tau_a$  ottenuti per sollecitazioni di tipo non proporzionale, dovrebbero risultare più elevati rispetto a quelli ottenuti per sollecitazioni di tipo proporzionale di *ampiezza paragonabile*, come ad esempio i casi di fig.2c.

Inoltre, una caratteristica che dovrebbe essere rispettata da una corretta definizione di  $\tau_a$  e  $\tau_m$  è quella dell'unicità della soluzione, cioè il fatto di fornire un unico valore per ciascuna delle due grandezze per assegnata curva T.

Tipicamente la curva T deve essere determinata in forma discreta e viene ottenuta come una sequenza di punti  $\tau_k$ , con  $k=1,2,\dots,N$ , le cui coordinate  $u_k$  e  $v_k$  sono date dalle componenti del vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  nel sistema di riferimento  $u-v$ . I punti  $\tau_k$  possono essere considerati i vertici di un poligono inscritto alla curva T, come quello visualizzato in fig.2b, avente un numero di punti  $N=8$ . La determinazione dei valori  $\tau_a$  e  $\tau_m$  in base alle definizioni proposte in letteratura richiede l'esecuzione di apposite procedure

numeriche che elaborano i valori delle coordinate  $u_k$  e  $v_k$  dei punti della curva T.

L'applicazione dei criteri di fatica multiassiale basati sul piano critico richiede che  $\tau_a$  venga determinata su un insieme discreto di piani  $F_i$ , con  $i=1,2..N_F$ , centrati nel punto analizzato ed è opportuno che il numero di giaciture  $N_F$  sia elevato al fine di ottenere stima sufficientemente precisa [6]. In conseguenza di ciò, è opportuno che la determinazione di  $\tau_a$  sia effettuata con algoritmi veloci, al fine di ridurre i tempi di calcolo.

Tra le definizioni proposte in letteratura per la determinazione delle componenti di sollecitazione  $\tau_a$  e  $\tau_m$  vi sono quelle della

- Massima Proiezione (MP) della curva T,
- Massima Corda (MC) della curva T,
- Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva T [7-12], ad oggi la definizione più utilizzata,
- Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) alla curva T [13], la definizione più recente ed apparentemente più efficace.

## 2. CONFRONTO TRA LE DEFINIZIONI DELLE COMPONENTI MEDIA ED ALTERNATA DELLA TENSIONE TANGENZIALE

Nella definizione della Massima Proiezione (MP) della curva T,  $\tau_a$  è assunta pari alla metà del più lungo tra i segmenti ottenuti proiettando la curva su rette passanti dall'origine degli assi al variare delle direzioni delle rette. In questa definizione  $\tau_m$  è considerato pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro della MP, come mostrato in fig.2d.

Nella definizione della Massima Corda (MC) della curva T,  $\tau_a$  è assunta pari a metà della lunghezza della MC stessa, mentre  $\tau_m$  è assunta pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro della MC, come mostrato in fig.2d.

Le definizioni MP ed MC forniscono lo stesso valore di  $\tau_a$ , essendo la MC della curva T lunga quanto la MP. Definendo  $P$  la lunghezza della MP e  $C$  la lunghezza della MC si ha

$$\tau_a = \frac{P}{2} = \frac{C}{2} \quad (14)$$

Nel caso della procedura del Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva T [4,5],  $\tau_a$  è assunta pari alla lunghezza del raggio del MCC

$$\tau_a = R \quad (15)$$

essendo  $R$  il raggio del MCC.  $\tau_m$  è assunta pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro del MCC, come mostrato in fig.2d.

Nel caso della procedura del Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) alla curva T [13],  $\tau_a$  è assunta pari a metà della lunghezza della diagonale  $D$  del MRC

$$\tau_a = \frac{D}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \quad (16)$$

essendo  $L_1$  ed  $L_2$  le lunghezze dei lati del MRC.  $\tau_m$  è assunta pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro del MRC, come mostrato in fig.2d.

In fig.3 sono mostrati i risultati ottenuti nella determinazione di  $\tau_a$  con i metodi MP/MC, MCC ed MRC nel caso di 5 differenti curve T, tutte aventi la corda massima di semi-lunghezza unitaria, cioè con  $C=P=2$ . Le curve sono costituite rispettivamente da un *segmento* (di lunghezza pari a 2), che rappresenta il classico caso di sollecitazione proporzionale, una *stella*, cioè il caso in cui la stessa ampiezza di sollecitazione si verifica in due direzioni ortogonali, un *quadrato* (le cui corde massime coincidono con le diagonali), una *circonferenza* (con raggio di lunghezza unitaria) rappresentativa del caso di vettore  $\tau_n$  di modulo costante e direzione variabile con continuità, e un *triangolo equilatero* (le

cui corde massime coincidono con i lati). I risultati numerici sono riassunti nelle prime 5 colonne della tabella 1 (la 4° riga si riferisce al nuovo metodo proposto nel lavoro). Nella sesta colonna della tabella sono riportati i valori massimi di  $\tau$  ottenibili dai tre metodi nel caso di curva *generica* avente corda massima di semilunghezza unitaria.

Per prima cosa deve essere sottolineato il fatto che il metodo MC e il metodo MP hanno il difetto di non fornire un risultato univoco per la tensione  $\tau_m$  nei casi in cui la curva T presenta più corde con la stessa lunghezza massima, che non presentano un punto in comune, come accade nel caso della curva T triangolare [5]. A sua volta il metodo MRC presenta lo stesso difetto per alcuni casi di curve aventi un asse di simmetria, come quello mostrato in fig.4 [15].

Come descritto in [14] i valori mostrati in tabella consentono di apprezzare le differenze massime tra i valori di  $\tau_a$  ottenuti con i tre metodi applicati alla stessa curva T. In particolare è possibile dimostrare che il raggio del MCC può risultare al più 1.1547 volte la semilunghezza della MC [11,14,15], e, a sua volta, la semilunghezza della diagonale del MRC può risultare lunga al più  $2^{1/2}=1.4142$  volte la lunghezza del raggio del MCC e la semilunghezza della MC, cioè si ha

$$\frac{P}{2} = \frac{C}{2} \leq R \leq 1.1547 \frac{C}{2} \quad \frac{P}{2} = \frac{C}{2} \leq R \leq \frac{D}{2} \leq 1.4142 \frac{C}{2} \quad (17a,b)$$

È importante notare che nei casi di curva a stella, quadrato e cerchio i metodi MP, MC ed MCC forniscono lo stesso risultato del caso di sollecitazione proporzionale, in contrasto con le evidenze sperimentali che mostrano che l'ampiezza di  $\tau_a$  che verifica le equazioni (1) deve essere maggiore [13]. Da questo punto di vista la definizione di  $\tau_a$  relativa al metodo del MRC appare più efficace degli altri metodi.

L'osservazione del risultato del MRC nel caso della curva T di forma quadrata spiega il motivo per il quale viene preso in considerazione il *massimo* rettangolo circoscritto e non il minimo [13]. In questo secondo caso il rettangolo circoscritto coinciderebbe con la curva T rettangolare e darebbe luogo ad una sottostima di  $\tau_a$  analoga a quella del metodo MCC.

È utile notare che se nel piano di normale  $\mathbf{n}$ , si assume un sistema di riferimento cartesiano  $x$ - $y$  avente asse  $x$  parallelo alla MP o alla MC, come mostrato in fig.4a, le lunghezze della MP e della MC coincidono con l'ampiezza del ciclo di tensione tangenziale agente in direzione  $x$ , cioè si ha:

$$\Delta \tau_x = \tau_{x,\max} - \tau_{x,\min} = C = P \quad (18)$$

Il valore della tensione tangenziale alternata risulta pari alla metà dell'ampiezza  $\Delta \tau_x$

$$\tau_a = \Delta \tau_x / 2 \quad (19)$$

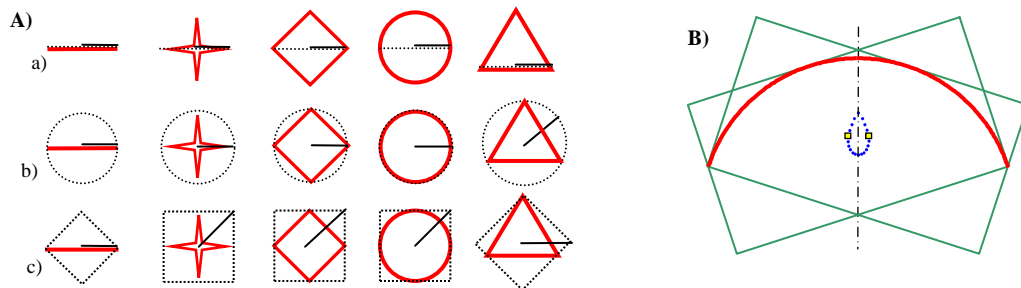


Figura 3: A) Valori di  $\tau_a$  (proporzionale al segmento nero in linea continua) ottenuti con i metodi a) MC, b) MCC, c) MRC, nei casi di curve T (in rosso) aventi la stessa lunghezza della corda massima e costituite rispettivamente da un segmento, una stella, una circonferenza, un quadrato, un triangolo equilatero, B) Ambiguità nella determinazione del MRC per curve con asse di simmetria: i centri dei 2 MRC sono identificati da un quadratino, i punti in blu sono i centri di altri possibili rettangoli circoscritti alla curva.

Tabella 1: Valori di  $\tau_a$  ottenuti con le tre procedure analizzate per diversi tipi di percorsi di carico con massima corda di lunghezza a pari 2.

	$\tau_a$ segmento	$\tau_a$ stella	$\tau_a$ quadrato	$\tau_a$ cerchio	$\tau_a$ triangolo	$\tau_a$ limite
$C/2$ (MC)	1	1	1	1	1	1
$R$ (MCC)	1	1	1	1	1.1547	1.1547
$D/2$ (MRC)	1	1.4142	1.4142	1.4142	1.3660	1.4142
$E[D/2]$ (RCM)	1	1.2732	1.2732	1.4142	1.3516	1.4142

Allo stesso modo si può osservare che se si assume un sistema di riferimento cartesiano  $x$ - $y$  avente assi paralleli ai lati del MRC (fig.4b), con l'asse  $x$  ruotato di un angolo  $\phi_M$  rispetto all'asse  $u$ , le lunghezze dei lati del rettangolo coincidono con le ampiezze dei cicli di tensione tangenziale agente in direzione  $x$  ed in direzione  $y$ :

$$\Delta \tau_x = \tau_{x,\max} - \tau_{x,\min} = L_1 \quad (20a,b)$$

$$\Delta \tau_y = \tau_{y,\max} - \tau_{y,\min} = L_2$$

Nella definizione relativa alla procedura del MRC, l'ampiezza della tensione alternata si ottiene dalla combinazione delle due ampiezze (20) come

$$\tau_a = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta \tau_x^2 + \Delta \tau_y^2} \quad (21)$$

La  $\tau_a$  così determinata può essere considerata una tensione tangenziale alternata *equivalente* ottenuta come combinazione delle ampiezze dei cicli di tensione tangenziale agenti lungo due direzioni ortogonali.

Le relazioni (18-21) mostrano alcune analogie tra i metodi MP/MC e il metodo MRC. Nei primi due la tensione  $\tau_a$  viene determinata dalla componente massima dell'ampiezza del ciclo di tensione tangenziale  $\Delta \tau_x$  al variare della direzione dell'asse di proiezione  $x$ , mentre nel metodo MRC viene determinata dalla massima combinazione delle ampiezze dei cicli di tensione  $\Delta \tau_x$  e  $\Delta \tau_y$  al variare della direzione del sistema d'assi  $x$ - $y$ . In base a quest'ultima caratteristica il metodo MRC fornisce valori di  $\tau_a$  più elevati nei casi in cui la curva T ha una forma che si differenzia dal segmento relativo alle sollecitazioni proporzionali.

### 3. ALGORITMI PER LA DETERMINAZIONE DELLE AMPIEZZE DEI CICLI DI TENSIONE

In questo paragrafo viene descritta una procedura per la determinazione delle ampiezze dei cicli di tensione  $\Delta \tau_x(\phi)$  e  $\Delta \tau_y(\phi)$ , valutati rispetto ad assi  $x$ - $y$  ortogonali, ruotati di un angolo  $\phi$  variabile nel campo  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  rispetto all'asse  $u$ , utili per la determinazione di  $\tau_a$  e  $\tau_m$  nei metodi MP/MC ed MRC. Come detto tali valori coincidono con le proiezioni della curva T lungo gli assi  $x$ - $y$  e con i lati dei rettangoli circoscritti alla curva aventi lati paralleli a tali assi, come si vede in fig.4b per il caso di  $\phi = \phi_M$ .

Le coordinate dei punti della curva T rispetto agli assi  $x$ - $y$ , coincidenti con le componenti della tensione tangenziale secondo gli assi stessi, possono essere determinate come valori delle distanze dei punti di coordinate  $u_k, v_k$  dai suddetti assi:

$$\tau_{x,k}(\phi) = \frac{v_k - n u_k}{\sqrt{1+n^2}} \quad \tau_{y,k}(\phi) = \frac{v_k - m u_k}{\sqrt{1+m^2}} \quad (22a,b)$$

essendo  $m$  ed  $n$  i coefficienti angolari delle rette coincidenti con gli assi  $x$ - $y$  al variare di  $\phi$ , dati dalle seguenti espressioni

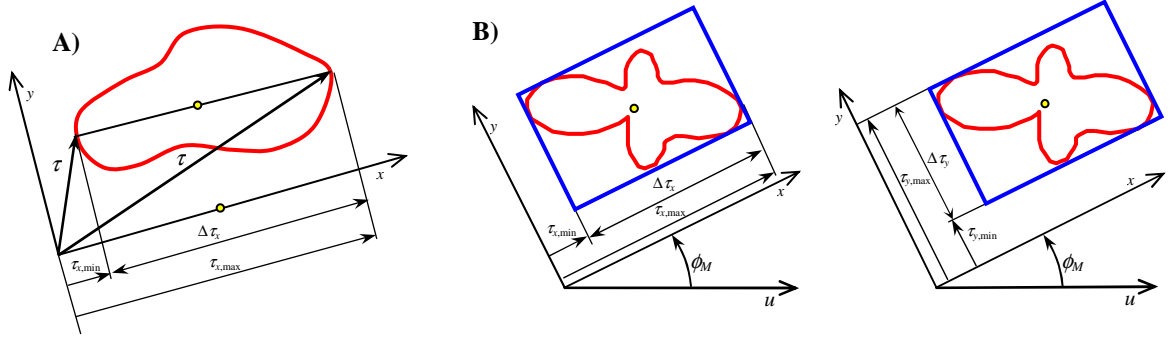


Figura 4: A) MC/MP ed ampiezza del ciclo di tensione tangenziale  $\Delta\tau_x$ ; B) MRC ed ampiezze dei cicli di tensione tangenziale  $\Delta\tau_x$  e  $\Delta\tau_y$ .

$$m = \tan \phi \quad n = -1/m \quad (23a,b)$$

Per ciascun angolo  $\phi$ , le ampiezze dei cicli di tensione tangenziale agenti in direzione  $x$  ed in direzione  $y$  (coincidenti con le proiezioni della curva  $T$  lungo i due assi ortogonali e con le lunghezze dei lati del rettangolo circoscritto) possono essere ottenute come

$$\Delta\tau_x(\phi) = \tau_{x,\max}(\phi) - \tau_{x,\min}(\phi) \quad \Delta\tau_y(\phi) = \tau_{y,\max}(\phi) - \tau_{y,\min}(\phi) \quad (24a,b)$$

essendo  $\tau_{x,\max}$ ,  $\tau_{x,\min}$ ,  $\tau_{y,\max}$  e  $\tau_{y,\min}$  i valori massimi e minimi delle componenti delle tensioni tangenziali negli assi  $x$ - $y$ , ovvero le coordinate dei punti della curva  $T$  aventi distanza massima e minima dagli assi:

$$\begin{aligned} \tau_{x,\max}(\phi) &= \max_k \{ \tau_{x,k}(\phi) \} & \tau_{x,\min}(\phi) &= \min_k \{ \tau_{x,k}(\phi) \} \\ \tau_{y,\max}(\phi) &= \max_k \{ \tau_{y,k}(\phi) \} & \tau_{y,\min}(\phi) &= \min_k \{ \tau_{y,k}(\phi) \} \end{aligned} \quad (25a,b)$$

Le coordinate del centro di ciascun rettangolo circoscritto possono essere ottenute con le seguenti relazioni

$$x_c(\phi) = \frac{1}{2} [\tau_{x,\max}(\phi) + \tau_{x,\min}(\phi)] \quad y_c(\phi) = \frac{1}{2} [\tau_{y,\max}(\phi) + \tau_{y,\min}(\phi)] \quad (26a,b)$$

Nel caso del metodo MP, le equazioni utili sono solo quelle relative alla direzione  $x$ . In tal caso, definito  $\phi_M$  l'angolo relativo al massimo valore di  $\Delta\tau_x(\phi)$

$$\phi_M \rightarrow \Delta\tau_x(\phi_M) = \max_{\phi} \{ \Delta\tau_x(\phi) \} \quad (27)$$

l'ampiezza della tensione tangenziale alternata e il valor medio sono dati da

$$\tau_a = \Delta\tau_x(\phi_M) \quad \tau_m = x_c(\phi_M) \quad (28,29)$$

Nel caso del metodo MRC per ciascun angolo  $\phi$  può essere determinata una *tensione tangenziale alternata equivalente* come la (21), data dalla combinazione delle ampiezze dei cicli di tensione tangenziale negli assi  $x$ - $y$

$$\tau_a(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\Delta\tau_x(\phi)^2 + \Delta\tau_y(\phi)^2} \right] \quad (30)$$

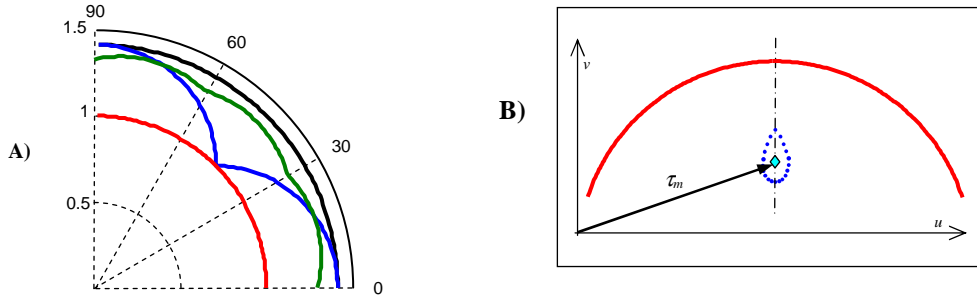


Figura 5: A) Andamento delle tensioni tangenziali alternate equivalenti al variare dell'angolo  $\phi$  nei casi di curve T lineare, a stella/quadrata, triangolare e circolare; B) determinazione del valore di  $\tau_m$  nel metodo proposto: posizioni dei centri dei rettangoli circoscritti (punti blu) e il loro baricentro (rombo).

Definito  $\phi_M$  l'angolo relativo al massimo valore di  $\tau_a(\phi)$

$$\phi_M \rightarrow \tau_a(\phi_M) = \max_{\phi} \{\tau_a(\phi)\} \quad (31)$$

l'ampiezza della tensione tangenziale alternata e il valor medio sono dati da

$$\tau_a = \tau_a(\phi_M) \quad \tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{x_c^2(\phi_M) + y_c^2(\phi_M)} \quad (32,33)$$

Da un punto di vista pratico è necessario applicare le relazioni (22-33) considerando un numero discreto  $N_\phi$  di angoli  $\phi_j$  uniformemente spazati nel campo  $0 \leq \phi_j \leq \pi/2$

$$\phi_j = j \frac{\pi}{2N} \quad j=0,1,\dots,N_\phi-1 \quad (34)$$

Ovviamente la precisione del metodo si incrementa con il numero di angoli utilizzati, così come aumentano i tempi di calcolo. In [15] è stato comunque mostrato che l'errore risulta in generale piuttosto contenuto già considerando solo  $N_\phi=6$  valori dell'angolo  $\phi$  per cui la procedura risulta molto competitiva anche dal punto di vista dell'onere computazionale.

In fig.5 è mostrato l'andamento della tensione equivalente  $\tau_a(\phi)$  al variare dell'angolo  $\phi$  per i casi di curve T costituite dalla retta (curva in rosso), dalla stella e dal quadrato (curva in blu, coincidenti), dal cerchio (nero) e dal triangolo (verde).

È interessante notare la differenza tra il caso del cerchio e i casi di stella e quadrato. Nel caso del cerchio si ha lo stesso valore per tutto l'intervallo dell'angolo  $\phi$ , mentre negli altri due il valore massimo è raggiunto solo per  $\phi=0$  e  $\pi/2$ .

#### 4. UNA NUOVO METODO PER LA DETERMINAZIONE DELL'AMPIEZZA DELLA TENSIONE TANGENZIALE

In base alle osservazioni in questo lavoro viene proposto un metodo che

- 1) fornisce un valore univoco della tensione tangenziale media,
- 2) fornisce un valore di tensione tangenziale alternata dipendente dall'ampiezza delle sollecitazioni equivalenti agenti *in tutte le direzioni al variare dell'angolo  $\phi$*  invece che dal solo valore massimo, come nel caso del metodo MRC.

In particolare, nel metodo proposto  $\tau_a$  è ottenuta come *valor medio delle tensioni equivalenti  $\tau_a(\phi)$  al variare dell'angolo  $\phi$* , descritte nella (30) e mostrate in fig.5A

$$\tau_a = \frac{1}{2} E[\tau_a(\phi)] \quad (35)$$



ovvero come valor medio delle semiampiezze delle diagonali dei rettangoli circoscritti alla curva T.

Il valore di  $\tau_m$  è definito come il modulo del vettore che punta il *baricentro dei centri dei rettangoli circoscritti alla curva* (fig.5B). Per la determinazione di  $\tau_m$  per prima cosa è necessario riferire le coordinate dei centri dei rettangoli circoscritti, ottenute rispetto ai vari assi x-y (26), ad un'unica coppia d'assi, in particolare gli assi u-v, effettuando un'opportuna rotazione delle coordinate:

$$\begin{aligned} u_c(\phi) &= x_c(\phi) \cos \phi - y_c(\phi) \sin \phi \\ v_c(\phi) &= -x_c(\phi) \sin \phi + y_c(\phi) \cos \phi \end{aligned} \quad (36a,b)$$

quindi le coordinate del baricentro dei centri possono essere ottenute come

$$u_c = E[u_c(\phi)] = \sum_{j=0}^{N_\phi-1} u_c(\phi_j) \quad v_c = E[v_c(\phi)] = \sum_{j=0}^{N_\phi-1} v_c(\phi_j) \quad (37)$$

e il valore di  $\tau_m$  può essere determinato come

$$\tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \quad (38)$$

In base alle caratteristiche descritte, il metodo sarà identificato nel seguito come metodo dei Rettangoli Circoscritti Mediati (RCM). In fig.5B sono mostrati i centri di alcuni rettangoli circoscritti alla curva T ottenuti per valori discreti dell'angolo  $\phi$  (punti blu), il loro baricentro (rombo) e il vettore il cui modulo coincide con il valore di  $\tau_m$ .

In generale il valore della tensione tangenziale  $\tau_a$  ottenuta è leggermente inferiore a quello ottenuto con il metodo MRC e la differenza massima si verifica nel caso della curva T a forma di stella/quadrato, come si osserva anche dalla Tabella 1 confrontando la 3° e la 4° riga.  $\tau_a$  risulta ovviamente uguale nel caso della curva T di forma circolare.

In [15] è stato effettuato un confronto tra i metodi MC ed MRC descritti in termini di differenze tra i valori di  $\tau_a$  ottenuti e di tempi di calcolo necessari per l'elaborazione, utilizzando 64 curve T con caratteristiche opportune. Tutte le curve sono caratterizzate dal fatto di avere uguale corda massima di semilunghezza unitaria, alcune hanno uguale forma, ma sono costituite da un numero  $N$  di punti differente, al fine di valutare l'effetto di questa caratteristica sui tempi di elaborazione (vedi [14]). In fig.6 a sinistra sono mostrati i valori di  $\tau_a$  ottenuti per le 64 curve con i 4 metodi ordinati rispetto ai valori ottenuti con il metodo RCM, che sono rappresentati dalla linea nera continua crescente in modo monotono. I risultati del metodo MC sono rappresentati, ovviamente, da una linea parallela all'asse delle ascisse e di ordinata unitaria. È possibile osservare come nei 64 casi sia confermata la condizione espressa dalla (17) e come, in generale, i valori ottenuti con il metodo RCM siano *leggermente inferiori* rispetto a quelli del metodo MRC.

Il metodo proposto è stato testato utilizzando i dati sperimentali relativi a 6 tipi di acciaio e a 21 storie di sollecitazione descritte in [13], dove gli autori hanno testato le differenze tra i metodi MCC ed MRC. Le storie 21 di carico sono costituite da componenti di sollecitazione aventi la seguente forma

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{xa} \sin \omega t \\ \tau_{xy} &= \tau_{xa} \sin \lambda_{xy} \omega t + \beta_{xy} \end{aligned} \quad (40a,b)$$

con valori dei parametri  $\sigma_{xa}$ ,  $\tau_{xa}$ ,  $\lambda_{xy}$  e  $\beta_{xy}$  opportunamente scelti per dare luogo a sollecitazioni proporzionali e non proporzionali di vario tipo [13].

La verifica è stata effettuata introducendo il valore di  $\tau_a$  ottenuto con il metodo proposto e i metodi MC ed MRC, nel criterio basato sull'approccio del piano critico di Susmel e Lazzarin [16], espresso dalla seguente equazione:

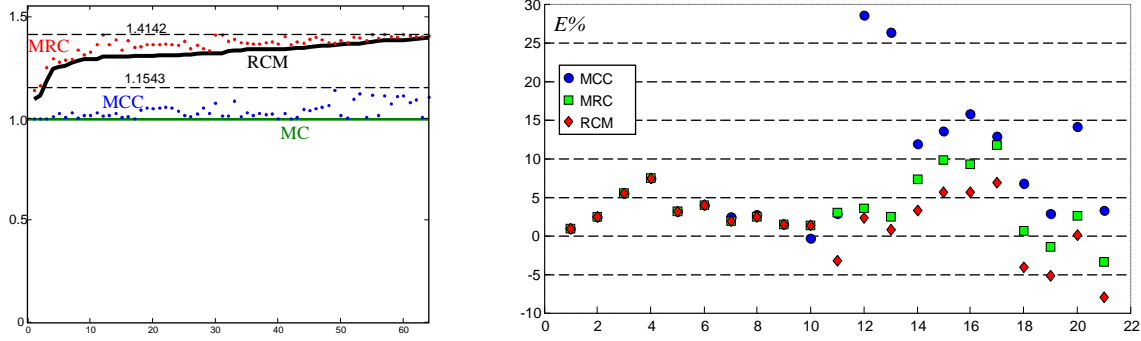


Figura 6: A sinistra valori di  $\tau_a$  ottenuti con il metodo proposto (linea continua), con il metodo MRC (punti in rosso, in alto) e con il metodo MCC (punti in blu, in basso) nel caso delle 64 curve T del rif.[15]. A destra il confronto tra gli errori dei metodi MCC ( $\circ$ ), MRC ( $\square$ ) ed RCM ( $\diamond$ ) nell'analisi delle 21 storie di carico disponibili in letteratura.

$$\tau_{c,a} + \left( \tau_f - \frac{\sigma_f}{2} \right) \frac{\sigma_{c,\max}}{\tau_{c,a}} \leq \tau_f \quad (41)$$

nella quale  $\tau_{c,a}$  è l'ampiezza della tensione tangenziale agente sul piano critico,  $\sigma_{c,\max}$  è la tensione normale massima agente nel piano critico durante il ciclo di carico,  $\tau_f$  e  $\sigma_f$  sono rispettivamente il limite di fatica a torsione e quello a flessione rotante. I valori di  $\tau_f$  e  $\sigma_f$  dei 6 tipi di acciaio considerati nell'analisi sono riportati in [13].

In accordo con quanto indicato in [13] il piano critico è stato individuato selezionando i piani su cui agisce una tensione  $\tau_a$  compresa tra il valore massimo determinato per la  $\tau_a$  stessa ( $\tau_{a,\max}$ ) e il 99% di tale valore, cioè  $0.99\tau_{a,\max} \leq \tau_a \leq \tau_{a,\max}$ , e scegliendo tra essi quello sul quale agisce il massimo valore della tensione massima del ciclo di carico  $\sigma_{\max}$ .

Il confronto tra i risultati ottenuti con i vari metodi è stato effettuato utilizzando la seguente funzione errore [13]:

$$E\% = 100 \frac{\tau_{c,a} + \left( \tau_f - \frac{\sigma_f}{2} \right) \frac{\sigma_{c,\max}}{\tau_{c,a}} - \tau_f}{\tau_f} \quad (42)$$

I risultati dell'analisi sono riassunti in fig.6 a destra, nella quale, in particolare, gli errori relativi ai 3 metodi, MCC, MRC e RCM ottenuti con la (42) sono rappresentati rispettivamente da marcatori a forma di cerchio, quadrato e rombo. I risultati ottenuti con i metodi MRC e RCM sono nettamente migliori di quelli relativi al metodo MCC. Per quanto concerne il confronto tra i primi due metodi, è stato valutato che l'errore medio ottenuto col metodo MRC è risultato  $E_{\text{MRC}}=4.06\%$ , mentre quello del metodo RCM è  $E_{\text{RCM}}=3.58\%$ , cioè leggermente migliore. Ovviamente i risultati ottenuti sono influenzati sia dal metodo di determinazione della tensione alternata, che è l'oggetto di questo lavoro, sia dal criterio di piano critico utilizzato, quindi non è possibile dedurre semplicemente che il metodo RCM è più preciso del metodo MRC. Tuttavia è possibile affermare che il metodo RCM è applicabile con buoni risultati al criterio considerato. Analoghi risultati sono stati ottenuti utilizzando il criterio di Matake [4].

## 5. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stata proposta una nuova procedura per la determinazione della tangenziale alternata per i criteri di fatica multiassiale basati sul concetto di piano critico, definita metodo dei Rettangoli Circoscritti Mediati (RCM) che

- 1) fornisce un valore univoco della tensione tangenziale media, come il metodo MCC;

- 2) fornisce un valore di tensione tangenziale alternata ben differenziato tra i casi di sollecitazioni proporzionali e non proporzionali, come il metodo MRC;
- 3) fornisce un valore di tensione tangenziale alternata dipendente dall'ampiezza delle sollecitazioni equivalenti agenti in tutte le direzioni passanti per il punto analizzato e non solo dall'ampiezza massima come accade per il metodo MRC.

Una verifica effettuata introducendo il valore di  $\tau_a$  ottenuto con il metodo proposto e i metodi MC ed MRC, in criteri basati sull'approccio del piano critico come quello proposto in [16] o il criterio di Matake, nell'analisi di casi di sollecitazione multiassiale per i quali sono disponibili informazioni sperimentali in letteratura ha mostrato la piena applicabilità del metodo proposto. I risultati ottenuti sono nettamente migliori di quelli ottenuti con il metodo MCC e leggermente migliori di quelli ottenuti con il metodo MRC.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] W.N. Findley, A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, *J. Eng. Ind.-Trans. ASME*, 81, 301-306 (1959).
- [2] D.L. McDiamid, A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 14, 429-453 (1991).
- [3] K. Dang Van, B. Griveau, O. Message, On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications, in: M.W. Brown, K.J. Miller (Eds.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London, 479-496 (1989).
- [4] B.R. You, S.B. Lee, A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals, *Int. J. Fatigue* 18 (4), 235-244 (1996).
- [5] A. Bernasconi, I.V. Papadopoulos, Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria, *Computational Materials Science*, Vol. 34, N.4 (2005).
- [6] Susmel L. A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *Int J Fatigue*, 32, 1875-83 (2010).
- [7] I.V. Papadopoulos, Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 21, 269-285 (1998).
- [8] K. Dang Van, A. Le Douaron, H.P. Lieurade, Multiaxial fatigue limit: a new approach, *Advances in Fracture Research, Sixth International Conference on Fracture*, New Delhi, 1879-1885 (1984).
- [9] Papadopoulos IV. A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals. *Int J Fatigue*, 16, 377-84 (1994).
- [10] B. Weber, B. Keunmeugne, J.C. Clement, J.L. Robert, Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Comp. Mater. Sci.*, 15, 381-399 (1999).
- [11] G. Petrucci, Un nuovo algoritmo per la determinazione dell'ampiezza della tensione tangenziale nei criteri di fatica basati sul piano critico, *Atti del XXXIX Convegno Nazionale*, 7-10 Settembre, Maratea (2010).
- [12] D. Elzinga, D.W. Hearn, Geometrical solutions for some minimax location problems, *Transport. Sci.*, 6, 96-104 (1972).
- [13] J.A. Araújo, A.P. Dantas, F.C. Castro, E.N. Mamiya, J.L.A. Ferreira, On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue, *International Journal of Fatigue*, 33, 1092-1100 (2011).
- [14] G. Petrucci, Improvements in the algorithms for the determination of the shear stress components in critical plane class fatigue criteria, *ICMFF9*, Parma (2010).
- [15] G. Petrucci, Considerazioni teoriche e pratiche sul metodo del massimo rettangolo circoscritto per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale nei criteri di fatica multiassiale basati sull'approccio di piano critico, *41° Convegno Nazionale AIAS*, Vicenza (2012).
- [16] Susmel L, Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, 25 63-78, (2002).